

TP 7 : Modèles d'interaction de populations

Problème 1

Construction d'un modèle général

On propose de faire une construction sous Scilab pour résoudre un système différentiel à 6 paramètres suffisamment général pour retrouver, en fonction des valeurs attribuées aux paramètres, les 3 cas d'interaction de population : coopération, compétition et proies-prédateurs.

1. Décrire sous Scilab, le système différentiel composé des 2 équations

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), y(t)) = a_1x(t) + b_1x^2(t) + c_1x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) = g(x(t), y(t)) = a_2y(t) + b_2y^2(t) + c_2x(t)y(t) \end{cases}$$

Faire une résolution numérique de ce système et faire une représentation graphique des évolutions des 2 populations $(t, x(t))$ et $(t, y(t))$ sur un même graphique, à partir d'une condition initiale arbitraire.

Faire sur un même graphique, une représentation de plusieurs portraits de phase en prenant un ensemble de conditions initiales arbitraires (courbes paramétriques $(x(t), y(t))$).

2. Trouver les signes ou la nullité éventuelle des 6 coefficients $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ permettant de retrouver les 3 cas d'interaction : coopération, compétition et proies/prédateurs.
3. Pour le modèle de coopération :

Choisir, par essais successifs et en utilisant les critères de stabilité, des valeurs de paramètres conduisant aux situations suivantes :

- position d'équilibre stable quand t tend vers l'infini
- croissance infinie des 2 populations

4. Pour le modèle de compétition :

Choisir, par essais successifs, des valeurs de paramètres conduisant aux situations suivantes :

- position d'équilibre avec survie des 2 populations
- situation où l'une des 2 populations disparaît au profit de l'autre

5. Pour le modèle proies-prédateurs :

Pour une condition initiale donnée arbitrairement, introduire une augmentation artificielle et l'effectif de la population des prédateurs à un instant donné T choisi arbitrairement.

Tracer le graphique des évolutions des 2 populations et tracer le graphique du portrait de phase.

Vérifier qu'en fonction de l'instant choisi correspondant à l'augmentation artificielle de la population des prédateurs, l'effectif maximal des proies peut soit diminuer, soit augmenter.

Problème 2

Construction de modèles multi-espèces et simulation

On considère 3 populations en interaction :

- de l'herbe se développant seule suivant une loi exponentielle ;
- des herbivores (lapins, par exemple) qui consomment de l'herbe exclusivement pour survivre ;
- des carnivores (renards, par exemple) qui consomment exclusivement les herbivores précédents pour survivre.

1. Proposer un système d'équations différentielles traduisant l'évolution de ces 3 populations.
2. Ecrire une simulation graphique de ce système sous Scilab. Faire des essais successifs avec différentes valeurs des paramètres de ces équations pour observer des situations qualitativement différentes.