Chapitre 01 : Graphes orientés

1 Introduction

De votre point de vue, un **graphe** est avant tout un formalisme qui permet de représenter les **relations** qui lient différentes **entités**. Ces relations peuvent être de différents types : relations sociales, proximité géographique, points communs, etc. L'avantage de la représentation par un graphe permet de "gommer" la sémantique associée à chaque relation pour ne conserver que la structure que forment ces relations.
La notion de graphe permet de traiter des situations où interviennent :

— des sommets représentant des points, villes, carrefours, noeuds d'un circuit électrique, des états (tâches d'un chantier), des personnes, des classes, des programmes, des machines, ...
— un réseau de transport (métro, bus, liaisons aériennes, réseau informatique, ...)
— un circuit électrique, un microprocesseur, un diagramme de classes
— des liaisons (orientées ou non) entre ces points ou états : routes, conducteurs, relation d'antériorité entre tâches, ...
— ...

On définit un modèle commun à ces situations, qui permet de construire des algorithmes de traitement réutilisables : c'est la notion de graphe, orienté ou non orienté.

Objectifs :

— préciser le vocabulaire, définir des représentations (par matrices, listes),
— mettre en oeuvre certains algorithmes (plus court chemin, ...)

2 Définitions d'un graphe orienté

Un graphe $G = (S, A)$ est défini par :

— un ensemble fini non vide $S = \{s_1, s_2, ...s_N\}$ de **sommets**,
— un ensemble A d'**arcs** : ce sont des couples (s_i, s_j) de sommets. On a $A \subset S \times S$.

L'**ordre** d'un graphe est son nombre de sommets. Dans le cas présent, l'ordre du graphe est N.
Graphiquement, les sommets sont représentés par des points, et les arcs par des flèches entre ces points.

Vocabulaire des liens entre arcs et sommets

Si $\alpha = (s_i, s_j)$ est un arc du graphe G, on dit que :

— s_i est l'**origine** de l'arc α.
— s_j est l'**extrémité** de l'arc α.
— α est **incident** à s_i et à s_j.
— les sommets s_i et s_j sont **adjacents** ou simplement **voisins**.
— s_j est un **successeur** de s_i.
— s_i est un **prédecesseur** de s_j.

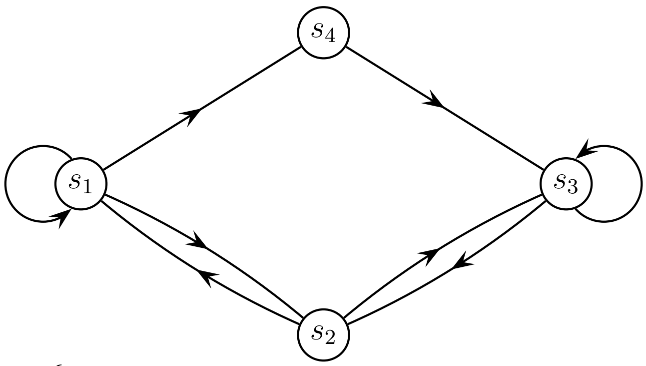
Cette notion de voisinage est centrale en algorithmique, elle permet de parcourir un graphe en partant d'un seul de ses sommets, en évoluant de proche en proche en suivant les voisins.

Demi-degré, degré

Pour un sommet s_i donné :

— le demi-degré sortant de s_i, noté $d^+(s_i)$ est le nombre d'arcs admettant s_i pour origine,
— le demi-degré entrant de s_i, noté $d^-(s_i)$ est le nombre d'arcs admettant s_i pour extrémité,
— le degré de s_i est $d(s_i) = d^+(s_i) + d^-(s_i)$.

Exemple



Ensemble des sommets $S = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
Ensemble des arcs $A = \{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
Ensemble des successeurs de s_1 : $\{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$
Ensemble des prédecesseurs de s_1 : $\{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$d^+(s_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $d^-(s_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $d(s_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$d^+(s_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $d^-(s_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $d(s_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$d^+(s_3) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $d^-(s_3) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $d(s_3) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$d^+(s_4) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $d^-(s_4) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $d(s_4) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\sum_{k=1}^{4} d^+(s_k) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sum_{k=1}^{4} d^-(s_k) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sum_{k=1}^{4} d(s_k) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Quel lien a-t-on entre les 3 derniers calculs ?

3 Graphes particuliers et autres approches

3.1 Graphe partiel, sous-graphe

— Un **graphe partiel** $G' = (S', A')$ de $G = (S, A)$ est obtenu en supprimant des arcs de G :

$$S' = S \text{ et } A' \subset A.$$

— Un **sous-graphe** $G'' = (S'', A'')$ de $G = (S, A)$ est obtenu en supprimant des sommets de G, ainsi que les arcs incidents à ces sommets :

$$S'' \subset S \text{ et } A^{''} = \{(s_i, s_j) \in A\ ;\ s_i \in S'' \text{ et } s_j \in S''\}.$$

3.2 Graphes particuliers

On a toujours $A \subset S \times S$. Deux cas particuliers sont :
— $A = \emptyset$: on dit que le graphe est vide.
— $A = S \times S$: on dit que le graphe est **complet**.

3.3 Autres approches des graphes orientés

— Possibilité d'admettre des arcs parallèles
— Ne pas accepter les boucles.
— Un graphe sans arcs parallèles et sans boucles s'appelle un graphe simple.

4 Représentations d'un graphe orienté

4.1 Représentations matricielles

4.1.1 Matrice d'adjacence

Pour $G = (S, A)$ graphe donné, en ordonnant S sous forme d'une suite $(s_1, s_2, ...s_N)$ on définit la matrice d'adjacence M, de taille (N, N) par :

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } (s_i, s_j) \text{ est un arc,} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple

La matrice d'adjacence du graphe précédent est

$$M = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Remarques :

- La matrice d'adjacence dépend de la manière d'ordonner les sommets.
- Elle permet de calculer ou retrouver les successeurs et prédecesseurs d'un sommet donné, les demi-degrés et degré de ce sommet. On démontre les relations :

$$\begin{pmatrix} d^+(s_1) \\ d^+(s_2) \\ \vdots \\ d^+(s_N) \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} d^-(s_1) \\ d^-(s_2) \\ \vdots \\ d^-(s_N) \end{pmatrix} = \left({}^tM\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Représentation d'un graphe par listes d'adjacence

On associe à chaque sommet une suite ordonnée de tous ses successeurs :

Sommets	Successeurs
s_1	$(s_{i_1}, s_{i_2}, \cdots)$
s_2	$(s_{j_1}, s_{j_2}, \cdots)$
$\vdots$	$\vdots$

Représentation adaptée à certains traitements informatiques.

Exemple

Sommets	Successeurs
s_1	·········
s_2	·········
s_3	·········
s_4	·········

5 Chemins et circuits dans un graphe orienté

5.1 Définitions

5.1.1 Chemin de longueur (ou taille) t

Dans un graphe orienté $G = (S, A)$, on appelle chemin de longueur t du sommet s au sommet s' une suite de $t + 1$ sommets

$$c = (x_0, x_1, \cdots, x_t)$$

tels que $x_0 = s,\ x_t = s'$, et $(x_0, x_1),\ (x_1, x_2), \cdots,\ (x_{t-1}, x_t)$ sont t arcs.
On dit que le chemin contient les arcs $(x_0, x_1),\ (x_1, x_2), \cdots,\ (x_{t-1}, x_t)$

Remarques

- Un arc (s_i, s_j) est un chemin de longueur 1.
- Par convention (s_i) représente un chemin de longueur 0.
- Il y toujours un sommet de plus qu'il y a d'arcs.

5.1.2 Circuit de longueur t

Un circuit de longueur t est un chemin $c = (x_0, x_1, \cdots, x_t)$ tel que l'on ait $x_0 = x_t$.

Remarque Une boucle (s_i, s_i) est un circuit de longueur 1.

5.1.3 Chemin (ou circuit) élémentaire

Le chemin $(x_0, x_1, \cdots, x_t)$ est dit **élémentaire** si tous ses sommets sont distincts, sauf éventuellement x_0 et x_t. Un tel chemin ne contient pas de circuit $(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_j)$ avec $x_j = x_i$, $i > 0$ ou $j < t + 1$.

Exemple

— Chemins de s_1 à s_3 :

élémentaires : ·········
·········
non élémentaires : ·········

— Circuits partant de s_1 :

élémentaires : ·········
·········
non élémentaires : ·········

5.2 Propriétés

Dans un graphe de N sommets :

— Un chemin élémentaire a une longueur inférieure ou égale à $N - 1$,
— Un circuit élémentaire a une longueur inférieure ou égale à N;
— Pour tout chemin c de s à s', on peut former un chemin élémentaire de s à s', dont les arcs sont des arcs de c (démonstration par récurrence sur t, longueur du chemin c).

Si M est la matrice d'adjacence du graphe G, pour tout $n \in N$, la matrice M^n vérifie :

$$M^n_{i,j} \text{ est égal au nombre de chemins de longueur } n \text{ de } s_i \text{ à } s_j.$$

Exemple

Calcul de M^2 et chemins de longueur 2 du graphe

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.3 Chemins et graphes particuliers

5.3.1 Graphe fortement connexe

Un graphe est **fortement connexe** si pour tous sommets s_i et s_j, il existe un chemin de s_i à s_j.

5.3.2 Chemin ou circuit eulérien

C'est un chemin ou un circuit contenant une fois et une seule chaque arc du graphe.
Exemples d'utilisation : tournée du facteur, figures traçables d'un seul trait,
historiquement : problème des ponts de Kōnigsberg.

Propriété : Un graphe admet des circuits eulériens si et seulement si $d^+(s_i) = d^-(s_i)$ pour tout sommet s_i.

5.3.3 Chemin ou circuit hamiltonien

C'est un chemin ou un circuit passant une fois et une seule par chaque sommet du graphe : c'est donc un chemin élémentaire de longueur $N-1$, ou un circuit élémentaire de longueur N.
Exemples d'utilisation : problème du voyageur de commerce, course du cavalier sur l'échiquier, ...

5.3.4 Exemples de chemins et du graphe

- Forte connexité : ....
- Circuits eulériens : ....
- Chemins hamiltoniens : ....
- Circuits hamiltoniens : ....

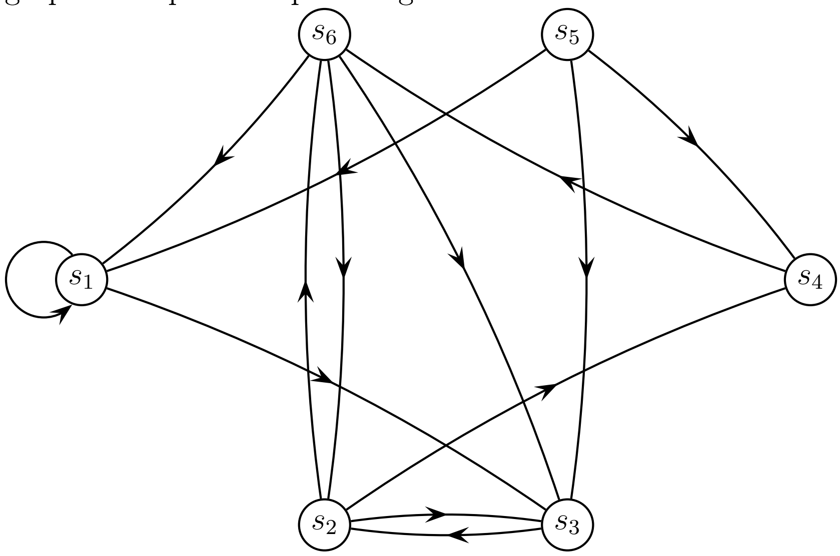
6 Exercices

Exercice n° 1

Construire le graphe correspondant à la relation "être diviseur de" pour les sommets 2 à 9.
Qu'est-ce qui se passe si on prend en compte qu'un nombre peut être son propre diviseur ou pas ?
Pour chacun des sommets, Déterminer l'ensemble des successeurs, l'ensemble des prédécesseurs, l'ensemble des sommets adjacents, les demi-degrés sortants et entrant, et le degré.
Déterminer la matrice d'adjacence.

Exercice n° 2

On considère le graphe G représenté par la figure ci-dessous



1) Déterminer les ensembles S des sommets et A des arcs.
2) Déterminer l'ensemble des successeurs de s_1, l'ensemble des prédécesseurs de s_3, l'ensemble des sommets adjacents à s_4.
3) Déterminer $d^+(s_1),\ d^-(s_1),\ d(s_1)$.
4) Dessiner le graphe partiel G' obtenu en supprimant de G tous les arcs ayant pour origine s_2.
5) Dessiner le sous-graphe G'' obtenu en supprimant de G le sommet s_1.
6) Construire la matrice d'adjacence M du graphe G.
7) Calculer les produits

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\ \left({}^tM\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } (1 \dots 1) \times M$$

Que retrouve-t-on ?

8) Déterminer dans G des chemins de s_6 *à* s_4 élémentaires, puis non élémentaires.
9) Peut-on trouver un chemin hamiltonien de ce graphe ? un circuit hamiltonien ?

Exercice n° 3

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Dessiner un graphe orienté G ayant M pour matrice d'adjacence.
2) Calculer M^2 puis M^3. Que représentent les coefficients de ces matrices ?
3) Donner la représentation de ce graphe par listes d'adjacence.
4) Ce graphe est-il fortement connexe ?
5) Admet-il des chemins, circuits eulériens ? hamiltoniens ?
6) Dessiner le graphe non orienté G' associé à ce graphe. Donner sa matrice d'adjacence. G' admet-il un cycle eulérien ?

Exercice n° 4

Deux joueurs se trouvent en présence de p tas d'allumettes ; ceux-ci contiennent respectivement $1, 3, 5, ..., 2p - 1$ allumettes. A tour de rôle, ils choisissent un tas non vide, et y prélèvent un nombre arbitraire d'allumettes (au moins une). Le joueur gagnant est celui qui prélève la dernière allumette. On se place dans le cas simple $p = 2$.

1) Construire un graphe dont les sommets représentent les différentes situations de jeu, représentées par les couples $(1, 3), ..., (0, 0)$.
2) Que représenteront les arcs de ce graphe ?
3) Donner une stratégie gagnante pour le joueur qui commence la partie. Y-a-t-il plusieurs solutions ?