1 Introducion

blah blah blah...

2 Pénalisation de la profondeur par un amortissement

2.1 Caractéristiques générales

Revenons maintenant à la question de la fonction d'amortissement. Comme nous l'avons vu (§ 1), le but de cette fonction est de réduire la valeur de l'indice de qualité pour les feuilles profondes. Soit f une telle fonction, elle doit être décroissante, positive et maximisée par 1. De plus, l'amortissement est pris en compte uniquement au-delà de la profondeur 1 ($f(1) = 1$). f doit donc répondre au schéma (1).

$$\begin{aligned} &f : [1, +\infty[\longrightarrow\ [0, 1] \\ &f(1) = 1 \\ &f(n+1) \leq f(n) \end{aligned} \tag{1}$$

Il existe une infinité de fonctions répondant à ces critères, et nous en étudions maintenant quatre types parmi les plus naturels : les fonctions linéaires, inverses, exponentielles et de seuillage. Par convention, nous appelons x_i la profondeur telle que $f(x_i) = i$. Par souci de clarté, nous associons systématiquement deux indicateurs aux amortissements : $x_{1/2}$ ($f(x_{1/2}) = \frac{1}{2}$) et δ. δ est un coefficient positif qui exprime la vitesse de l'amortissement (plus δ est grand, plus l'amortissement est rapide). Pour faciliter la compréhension de δ, nous l'exprimerons en fonction de x_i.

2.2 Fonction linéaire

$$\begin{aligned} f(x) &= -\delta.x + \delta + 1,\ x \leq x_0 = \frac{1+\delta}{\delta} \\ f(x) &= 0,\ x \geq x_0 = \frac{1+\delta}{\delta} \\ \delta &= \frac{1}{2(x_{1/2} - 1)} \ \Leftrightarrow\ x_{1/2} = \frac{\delta + 1/2}{\delta} \end{aligned} \tag{2}$$

Nous avons défini une fonction d'amortissement linéaire type à l'aide de l'équation paramétrique (2). Elle permet d'obtenir un amortissement continu sur la profondeur.

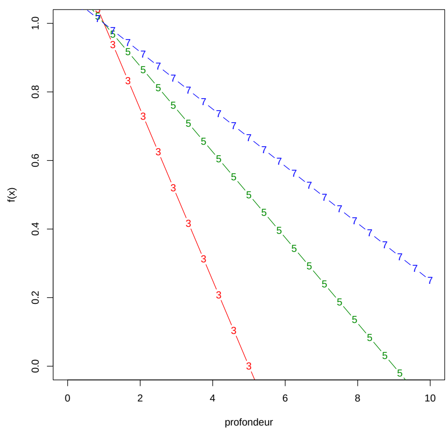


Figure 1: Exemples de fonctions linéaires avec $x_{1/2} \in \{3, 5, 7\}$

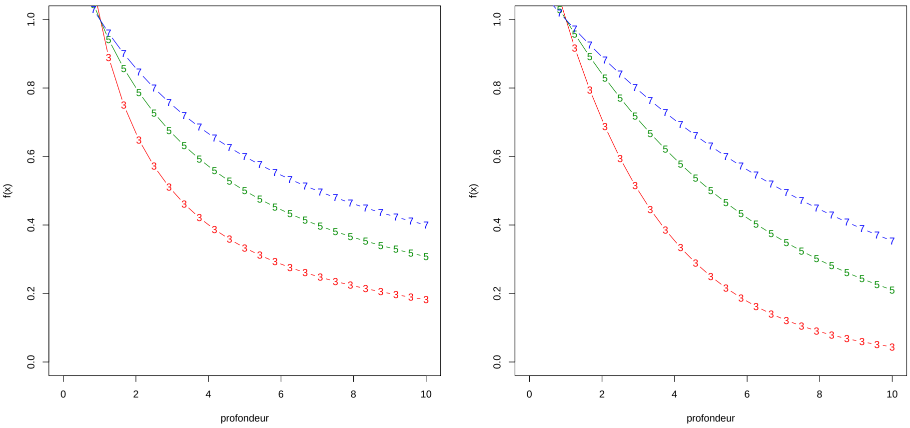
2.3 Fonction inverse

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\delta.x + 1 - \delta}, \; x \geq 1 \\ \delta &= \frac{1}{x_{1/2} - 1} \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \frac{\delta + 1}{\delta} \end{aligned} \tag{3}$$

Cet amortissement est inversement proportionnel à la profondeur, il répond à l'équation (3). La fonction inverse se différencie de la fonction linéaire par une décroissance non constante, plus rapide à faible profondeur. Cette variation de la vitesse se caractérise par une courbe concave (FIG. 2(a)). De plus, cet amortissement n'atteint jamais zéro.

2.4 Fonction exponentielle

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\delta.(1-x)} \\ \delta &= \frac{\ln 2}{x_{1/2} - 1} \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \frac{\delta + \ln 2}{\delta} \end{aligned} \tag{4}$$



(a) Fonctions inverses (b) Fonctions exponentielles

Figure 2: Exemples d'amortissements avec $x_{1/2} \in \{3, 5, 7\}$

Un autre amortissement est obtenu à l'aide d'une fonction exponentielle (4), son comportement est semblable à celui de la fonction inverse. L'amortissement est légèrement moins important tant que la profondeur ne dépasse pas $x_{1/2}$, en revanche, il devient plus puissant au delà.

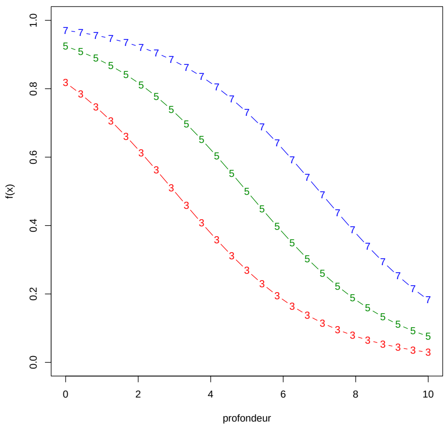
2.5 Fonction de seuillage

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1,\; x = 1 \\
f(x) &= \frac{e^{\delta.(x_{1/2}-x)}}{1+e^{\delta.(x_{1/2}-x)}} = \frac{1}{1+e^{\delta.(x-x_{1/2})}}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

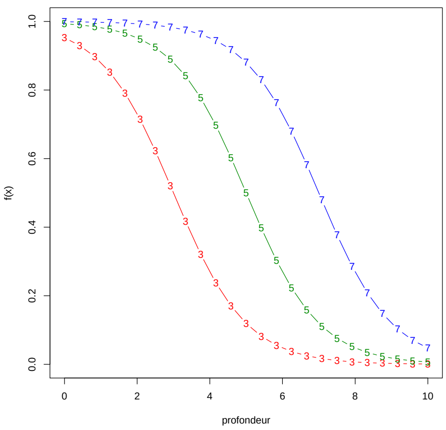
Pour la définition de cette fonction (5), nous avons choisi $x_{1/2}$ comme profondeur de seuil. L'amortissement ainsi fourni est totalement différent des précédents. Avant d'atteindre $x_{1/2}$, la courbe est convexe, c'est-à-dire que l'amortissement accélère, ensuite elle devient concave et l'amortissement ralentit (FIG. 3). Ainsi, il est facile de déterminer une profondeur limite, au-delà de laquelle l'indice de qualité est fortement pénalisé. Dans ce cas, $x_{1/2}$ ne suffit pas pour définir δ, il faut lui adjoindre un autre x_i. Pour clarifier le rôle de δ, nous l'exprimons en fonction de $x_{3/4}$ ($f(x_{3/4}) = \frac{3}{4}$) :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^{\delta.(x_{3/4}-x_{1/2})}} &= \frac{3}{4} \\
e^{\delta.(x_{3/4}-x_{1/2})} &= \frac{1}{3} \\
\delta.(x_{3/4}-x_{1/2}) &= -\ln 3 \\
\delta &= \frac{\ln 3}{x_{1/2}-x_{3/4}}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

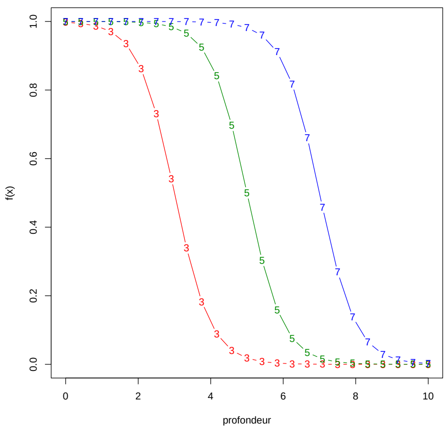
Ainsi, avec un δ élevé ($\delta \gg \ln 3 \simeq 1.098$), il n'y a quasiment pas d'amortissement avant d'atteindre le seuil ($x_{1/2}$) alors qu'avec un δ faible ($\delta \ll \ln 3$), l'amortissement est effectif même avant le seuil (FIG. 3), d'où la nécessité de paramétrer la fonction de seuillage pour que $f(1) = 1$.



(a) $\delta = 0.5$



(b) $\delta = 1$



(c) $\delta = 2$

Figure 3: Exemples de seuillages avec $x_{1/2} \in \{3, 5, 7\}$